Divulgaciones Matemáticas Vol. 19 No. 2 (2018), pp. 95–97

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la XX Olimpiada Centroamericana y del Caribe, celebrada en La Habana, Cuba, en junio del 2018.

144. Sean x, y números reales tales que los tres números

$$x - y, \quad x^2 - y^2, \quad x^3 - y^3$$

son positivos y números primos. Demuestre que $x - y = 3$.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–28, 44, 51, 54, 59, 69, 79, 82–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–130 y 133–143. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

80. [**12**(1) (2004) p. 95.] En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero. Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

    Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar cómo juegue su rival.

Solución de Giovanny Soto (estudiante de la Licenciatura en Matemática), Universidad del Zulia, Facultad de Ciencias: Mostraremos una estrategia ganadora para el jugador A. Al iniciar el juego A escoge el número 4 y se borran 4 y 8 de la pizarra. Ahora hay varios casos:

Si B escoge el 3 los números restantes en la pizarra serían $\{1, 2, 5, 7\}$ que son primos entre sí. A toma cualquiera de ellos, B otro, A otro y B toma el último, perdiendo.

Si B escoge el 5 o el 7 basta con que A escoja el 3, ya que los números restantes en la pizarra serían $\{1, 2, 7\}$ o $\{1, 2, 5\}$. Entonces B toma cualquiera de ellos, A otro y B toma el último, perdiendo.

Si B escoge el 2, A escoge el 3 ya que de esta manera los números que quedan en la pizarra serán $\{1, 5, 7\}$ que son primos entre si y como antes B toma el último.

Si B escoge el 6, A escoge el 9 y los números en la pizarra serán $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ que son todos primos entre sí, y B tomará el último.

Si B escoge el 9, A escoge el 6 y gana como en el caso anterior.

81. [**12**(1) (2004) p. 96.] Se define una sucesión a_0, a_1, a_2,... de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$. Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

Solución de Giovanny Soto (estudiante de la Licenciatura en Matemática), Universidad del Zulia, Facultad de Ciencias: Los a_k entre 1 y 2004 son:

$$\begin{array}{cccc} a_1 = 1 & a_2 = 3 & a_3 = 5 & a_4 = 9 \\ a_5 = 15 & a_6 = 25 & a_7 = 41 & a_8 = 67 \\ a_9 = 109 & a_{10} = 177 & a_{11} = 287 & a_{12} = 465 \\ a_{13} = 753 & a_{14} = 1219 & a_{15} = 1973. & \end{array}$$

Los pares de enteros (m, n) con $m, n = 1, \ldots, 15$ y $m \neq n$ son $\binom{15}{2} = 105$. Los pares tales que $a_m + a_n > 2004$ son los de la forma $a_{15} + a_k$ con $k = 7, \ldots, 14$. Por lo tanto, la cantidad de enteros de la forma $a_m + a_n$ que hay entre 1 y 2004 con m y n enteros positivos y $m \neq n$ es a lo sumo $\binom{15}{2} - 8 = 105 - 8 = 97$. Si existiesen pares de enteros diferentes (m, n) y (m', n') tales que $a_m + a_n = a_{m'} + a_{n'}$ la cantidad podría ser menor que 97. Pero esto no puede ocurrir: si por ejemplo $m > m' > n'$, como a_1, a_2,... es una sucesión creciente de enteros positivos, tendremos que $a_m + a_n > a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + 1 > a_{m'} + a_{n'}$. Por lo tanto la respuesta es 97.

132. [**16**(2) (2008) p. 327.] Halle el menor entero positivo N tal que la suma de sus cifras sea 100, y la suma de las cifras de $2N$ sea 110.

Solución del editor: Sea $S(n)$ la suma de las cifras del entero positivo n. Observemos que si todos los dígitos de n son menores que 5, entonces obviamente $S(2n) = 2S(n)$. Pero por cada dígito de n mayor o igual que 5, al sumar $n + n$ se produce el acarreo de una unidad, lo que hace que $S(2n)$ disminuya 9 unidades respecto de $2S(n)$. En otras palabras, $S(2n) = 2S(n) - 9x$, donde x es el número de unidades *llevadas*, que es igual al número de dígitos de n que son mayores o iguales que 5. En este problema $2S(N) - S(2N) = 200 - 110 = 90$, por lo tanto N debe contener 10 cifras mayores o iguales que 5. Como estamos interesados en el menor N posible, pongamos estas 10 cifras iguales a nueve, para disminuir el número total de cifras. Para completar $S(N) = 100$ con cifras menores que 5, se necesitan al menos tres cifras, que podrían ser 4, 4 y 2 o 4, 3 y 3. Nos conviene la primera opción para poner el 2 en el primer lugar, y así formamos el número $N = 2449999999999$.

(Verificación: $S(N) = 2+4+4+10\cdot 9 = 100$, $S(2N) = S(4899999999998) = 4+8+10\cdot 9+8 = 110$.)